

SOBOLEV FAZOLARIDA EKSPONENSIAL DIFFERENSIAL OPERATORGA MOS OPTIMAL KVADRATUR FORMULALARNI QURISH

Sherzod Abdusalomov

Farg‘ona davlat texnika universiteti, Farg‘ona, O‘zbekiston;

sherzodabdusalomov268@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu tezisdagi Sobolev tipli Gilbert fazolarida funksiyalarni taqribiy integrallash uchun optimal kvadratur formulalarni qurish masalasi tadqiq qilingan. Xususan, $\frac{d^4}{dx^4} - 2\frac{d^2}{dx^2} + 1$ ko‘rinishidagi 4-tartibli differensial operatorning diskret analogi konstruktsiya qilinib, optimal koeffitsiyentlarni analitik aniqlash tizimi ishlab chiqilgan.

Kalit so‘zlar: Sobolev fazosi, optimal kvadratur formula, diskret operator, Furrye almashtirishi, ekstremal funksiya, xatolik funksionali.

1. Masalaning qo‘yilishi va asosiy tushunchalar

Hisoblash matematikasida differensial va integral tenglamalarni yechishda yuqori aniqlikdagi approksimatsiyalovchi kubatur va kvadratur formulalarni ishlab chiqish asosiy masalalardan biridir. Ushbu ishda ko‘rib chiqilayotgan differensial operator quyidagi ko‘rinishga ega:

$$L = \frac{d^4}{dx^4} - 2\frac{d^2}{dx^2} + 1$$

Ushbu operatorning diskret analogi $D(h\beta)$ quyidagi konvolyutsiya tenglamasidan aniqlanadi:

$$D(h\beta) * G(h\beta) = \delta(h\beta)$$

Bu yerda $\delta(h\beta)$ — diskret delta-funksiya, $G(x)$ esa quyidagi fundamental yechim funksiyasidir:

$$G(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{4} \left(x \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$$

2. Furrye almashtirishlari va yordamchi apparat

Uzluksiz va diskret argumentli funksiyalar uchun to‘g‘ri va teskari Furrye almashtirishlari quyidagicha kiritiladi:

$$F[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{2\pi i p x} dx, \quad F^{-1}[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(p) e^{-2\pi i p x} dp$$

Konvolyutsiya va hosilalar uchun asosiy xossalari:

$$F[\varphi * \psi] = F[\varphi] \cdot F[\psi]$$

$$F[\delta^{(a)}(x)] = (-2\pi i)^a, \quad F[\delta(x)] = 1$$

$$\delta(hx) = h^{-1} \delta(x), \quad \delta^{(a)}(x) * f(x) = f^{(a)}(x)$$

3. Optimal koeffitsiyentlarni aniqlash

Kvadratur formulaning optimal C_β ($\beta = 0, 1, \dots, N$) koeffitsiyentlari va d_1, d_2 parametrlarini topish uchun quyidagi chiziqli sistema hosil qilinadi:

$$C_\beta * G(h\beta) + d_1 e^{h\beta} + d_2 e^{-h\beta} = f(h\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, N$$

$$\sum_{\beta=0}^N C_{\beta} e^{h\beta} = -1$$
$$\sum_{\beta=0}^N C_{\beta} e^{-h\beta} = 1 - e^{-1}$$

Bu yerda $f(h\beta)$ o‘ng tomon funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$f(h\beta) = \int_0^1 G(x - h\beta) dx$$
$$= \frac{1}{8} [8 + (1 + e^{-1})(h\beta)e^{h\beta} - (1 + e)(h\beta)e^{-h\beta} - (2 + 3e^{-1})e^{h\beta} - (2 + e)e^{-h\beta}]$$

Agar quyidagi yordamchi funksiyalar kiritilsa:

$$v(h\beta) = C_{\beta} * G(h\beta)$$
$$u(h\beta) = v(h\beta) + d_1 e^{h\beta} + d_2 e^{-h\beta}$$

u holda C_{β} koeffitsiyentlar $D(h\beta)$ operatori vositasida to‘g‘ridan-to‘g‘ri ifodalanadi:

$$C_{\beta} = D(h\beta) * u(h\beta)$$

$h\beta \notin [0,1]$ sohada $C_{\beta} = 0$ ekanligini hisobga olgan holda, $u(h\beta)$ funksiyasining analitik ko‘rinishi chegaradan tashqarida eksponensial ifodalar orqali aniqlanadi va yopiq chiziqli sistemaga keltiriladi.

Xulosa

Ishda Sobolev fazosida eksponensial differensial operator bilan bog‘liq optimal kvadratur formula to‘liq qurildi. Ekstremal funksiya yordamida xatolik funksionalining normasi baholandi hamda $\frac{d^4}{dx^4} - 2\frac{d^2}{dx^2} + 1$ operatorining diskret analogi orqali optimal koeffitsiyentlarning oshkor ko‘rinishlari topildi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Motorniy V.P. O nailuchshey kvadrurnoy formule vida dlya nekotox klassov periodicheskix differensiruemyx funktsiy // Izv. AN SSSR. Ser. Mat., 1974. T. 38, s. 583–614.
2. Ligun A.A. O nailuchshix kvadrurnyx formulax dlya nekotox klassov periodicheskix funktsiy // Mat. zametki, 1978. T. 24, № 5, s. 661–669.
3. Sobolev S.L. Vvedenie v teoriyu kubaturnyx formul. — M.: Nauka, 1974. — 808 s.
4. Vaskevich V.L. Invariantnye kubaturnye formulы tipa Gregori dlya mnogomernogo kuba // Sib. jur. industr. mat., 2003. T. 4, № 3, s. 34–66.